JUROS COMPOSTOS

Capitalização composta é aquela em que a taxa de juros incide sobre o capital inicial, acrescido dos juros acumulados até o período de montante anterior. Neste regime de capitalização a taxa varia exponencialmente em função do tempo.

O conceito de montante é o mesmo definido para capitalização simples, ou seja, é a soma do capital aplicado ou devido mais o valor dos juros correspondentes ao prazo da aplicação ou da dívida. A simbologia é a mesma já conhecida, ou seja, S é o montante, P o capital inicial, n o prazo e i a taxa. A dedução da fórmula do montante para um único pagamento é pouco mais complexa que aquela já vista para a capitalização simples. Para facilitar o entendimento vamos admitir que nos defrontamos com o seguinte problema:

Calcular o montante de um capital de $1.000,00, aplicado à taxa de 4 % ao mês, durante 5 meses.

P = 1.000,00

n = 5 meses

i = 4 % ao mês

S = ?

Como ainda não conhecemos uma fórmula para a solução fácil e rápida desse problema, e sabendo que a taxa de juros para cada período unitário incide sobre o capital inicial mais os juros acumulados, calculemos o montante da forma mais primária possível. Vamos representar por S_t (t = a seguir permite1,2,3,4,5) o valor do montante no final de cada período unitário, que em nosso exemplo é o mês.

O quadro a seguir permite que visualizemos claramente o cálculo do montante mês a mês.

MÊS	CAPITAL NO INICIO DO MÊS(P_t)	juros correspondentes ao mês(J_t)	montante no final do mês (St)
1	1.000,00	1.000,00x0,04 = 40,00	1040,00
2	1.040,00	1.040,00x0,04 = 41,60	1.081,60
3	1.081,60	1.081,60x0,04 = 43,26	1.124,86
4	1.124,86	1.124,86x0,04 = 45,00	1.169,86
5	1.169,86	1.169,86x0,04 = 46,79	1.216,65

Portanto, o valor do montante no final do quinto mês é de $ 1.216,65. Observa-se que o montante no final de cada mês constitui-se no capital inicial do mês seguinte. Entretanto, essa forma de cálculo é extremamente trabalhosa e demorada. Vamos deduzir uma fórmula que permita um cálculo mais fácil e rápido, partindo do desenvolvimento anterior, mas sem que sejam efetuadas as operações de multiplicação e soma, apenas usando a propriedade distributiva do produto em relação a soma.

So = 1.000,00

S1 = 1.000,00 + 0,04X1.000,00 = 1.000,00(1 + 0,04) = 1.000,00 $(1,04)^1$

S2 = 1.000,00(1,04) + 0,04X1.000,00(1,04) = 1.000,00(1,04)(1,04) = 1.000,00$(1,04)^2$

S3 = 1.000,00$(1,04)^2$ + 0,04x1000,00$(1,04)^2$ = 1.000,00$(1,04)^2$(1,04) = 1.000,00$(1,04)^3$

S4 = 1.000,00$(1,04)^3$ + 0,04x1.000,00$(1,04)^3$ = 1.000,00$(1,04)^3$(1,04) = 1.000,00$(1,04)^4$

S5 = 1.000($(1{,}04)^4$ +0,04X1.000,00$(1{,}04)^4$ = 1.000,00$(1{,}04)^4$ (1,04) = 1.000,00$(1{,}04)^5$

O valor do montante no final do quinto mês é dado pela expressão S5 = 1.000,00$(1{,}04)^5$. Como($1{,}04)^5$= 1,21665 →S5 = 1.000,00X1,21665 = 1.216,65, que confere com o valor determinado anteriormente.

Substituindo cada número da expressão S5 = 1.000,00$(1{,}04)^5$ pelo seu símbolo correspondente temos :

$$S_n = P(1+i)^n$$

Como não há possibilidade de confusão, para simplificar vamos fazer $S_n = S$. Assim, a fórmula final do montante é dada pela equação $S = P(1+i)^n$ em que a expressão ($1+i)^n$ é chamada fator de capitalização ou fator de acumulação de capital para pagamento simples ou único.

Esse fator, que se encontra tabelado para diferentes taxas no apêndice B, representa o montante para uma unidade de capital, isto é, para P = 1.

Exemplo:

Calcular o montante de uma aplicação de $ 15.000,00, pelo prazo de 6 meses, a taxa de 3 % ao mês.

Dados: P = 15.000,00

n = 6 meses

i = 3% ao mês

S = ?

Solução: S = P $(1+i)^n$

S = 15.000,00X$(1{,}03)^6 = 17.910{,}78$

Observação: Para quem não possui uma calculadora que contenha a função potência y^x , o valor correspondente a expressão $(1{,}03)^6$ pode ser obtido no apêndice B, na tabela para uma taxa de 3%, coluna correspondente ao Fator de Acumulação de Capital $(1+i)^n$ e na linha n = 6, onde vamos encontrar o valor 1,19405. A solução neste caso seria assim obtida:

S = 15.000,00x1,19405 = 17.910,75

A diferença de $ 0,03 deve-se a problemas de arredondamento: enquanto a tabela apresenta o Fator de Acumulação de Capital com cinco casas decimais, as calculadoras normalmente trabalham com um número maior de decimais.

O valor atual (ou valor presente) de um pagamento simples, ou único, cuja conceituação é a mesma já definida para capitalização simples, tem sua fórmula de cálculo deduzida da fórmula do montante, como segue:

S = P $(1+i)^n$ → P $\frac{S}{(1+i)^n}$ →P = S x $\frac{1}{(1+i)^n}$

em que a expressão $\frac{1}{(1+i)^n}$ é chamada Fator de Valor Atual para pagamento simples (ou único).

Esse fator, que também se encontra tabelado para diferentes taxas no apêndice B , representa o valor atual para o montante de uma unidade, isto é, para S = 1.

Exemplo:

No final de dois anos, o Sr. Pedro deverá efetuar um pagamento de $ 200.000,00 referente ao valor de um empréstimo contraído hoje, mais os juros devidos, correspondentes a uma taxa de 4% ao mês. Pergunta-se: Qual o valor emprestado?

Dados: S = 200.000,00

n = 2 anos = 24 meses

i = 4% ao mês

P = ?

Solução: P = S $\frac{1}{(1+i)^n}$

P = 200.000,00 X $\frac{1}{(1{,}04)^{24}}$ = 78.024,29

Observação: Para quem não possui calculadora com a função y^x , o valor correspondente à expressão $\frac{1}{(1{,}04)^{24}}$ também pode ser obtido no apêndice B, na tabela correspondente a 4%, coluna correspondente ao Fator de Valor Atual $\frac{1}{(1+i)^n}$ e na linha n = 24, onde vamos encontrar o valor 0,39012. Neste caso, a solução seria obtida como segue:

P = 200.000,00x0,39012 = 78.024,00

Também neste caso, a diferença de $ 0,29 deve-se a problemas de arredondamento pelas razões já explicadas.

Outros exemplos:

1. A loja " topa tudo" financia a venda de uma mercadoria no valor de $ 16.000,00, sem entrada, para pagamento em uma única prestação de $ 22.763,61 no final de oito meses. Qual a taxa mensal cobrada pela loja?

Dados: S = 22.753,61

P = 16.000,00

n = 8 meses

i = ?

Solução: S = P$(1+i)^n$

22.753,61 = 16.000,00 $(1+i)^8$

1,42210 = $(1+i)^8$ ou$(1+i)^8 = 1{,}42210$

A solução matemática dessa expressão pode ser obtida facilmente com o auxílio de uma calculadora que possua a função potência y^x. Como se trata de uma igualdade, o valor de i pode ser obtido extraindo-se a raiz oitava de ambos os membros(que é o mesmo que elevar ambos os membros ao expoente $\frac{1}{8}$, como segue:

$[(1+i)^{8^{1/8}}$ = $(1{,}42210)^{1/8}$

1 + i = $(1{,}42210)^{1/8}$ = 1,04500

I = 1,045 – 1 = 0,045

I = 4,5% ao mês

O valor de i também pode ser obtido através de logaritmo, definido para qualquer base. Vamos utilizar os logaritmos mais conhecidos, o neperiano e o base 10.

a) Logaritmo neperiano

$$log(1+i)^8 = log1{,}42210$$

8xlog(1 + i) = log 1,42210

Log (1 + i) = $\frac{log1{,}42210}{8} = \frac{0{,}35213}{8} = 0{,}04402$

1 + i = antlog 0,04402 = 1,04500

i = 0,045 = 4,5% ao mês

b) Logaritmo na base 10

$\log_{10}(1+i)^8$ = $\log_{10} 1{,}42210$

8x$\log_{10}(1+i)$ = $\log_{10} 1{,}42210$

$$\log_{10}(1+i) = \frac{\log_{10} 1{,}42210}{8} = \frac{0{,}15293}{8} = 0{,}01912$$

1 + i = $(10)^{0{,}01912} = 1{,}0450$

I = 4,5% ao mês

A taxa de juros poderia ser obtida através de um processo iterativo, conhecido por processo de tentativa e erro. Trata-se de um processo trabalhoso que somente seria adotado em última instância, caso a pessoa não tivesse uma calculadora com a função y^x e nem conhecesse logaritmo. Consiste, no caso deste exemplo, em atribuir valores sucessivos à incógnita i até que o resultado da expressão $(1+i)^8$

Coincida com o valor 1,42210. Assim se fizermos i = 10%, teremos $(1{,}10)^8 = 2{,}14359$, que indica claramente que a taxa deve ser menor, para i = 5%, o resultado 1,47746 indica que a taxa deve ser ainda menor, utilizando uma taxa de 4%, o valor resultante de 1,36857 mostra agora que a taxa deve ser maior, se fizermos i = 4,5%, teremos a solução do nosso problema.

A solução do problema por " tentativa e erro" pode ser obtida através das tabelas transcritas no apêndice B deste livro. Para tanto, admitindo-se que a taxa procurada esteja tabelada, basta pesquisar na coluna correspondente ao Fator de Capitalização $(1+i)^n$ na linha n = 8, até encontrar o valor 1,42210. E realmente vamos encontra-lo na tabela correspondente à taxa de 4,5%.

2. Em que prazo um empréstimo de $ 30.000,00 pode ser quitado em um único pagamento de $ 51.310,18, sabendo-se que a taxa contratada é de 5% ao mês?

   Dados: S = 51.310,18

   P = 30.000,00

   I = 5% ao mês

   n = ?

Solução: S = P $(1+i)^n$

$(1+i)^n = \frac{S}{P}$

$$(1{,}05)^n = \frac{51.310{,}18}{30.000{,}00} = 1{,}71034$$

A solução direta deste problema somente pode ser obtida através de logaritmo. Vamos utilizar o logaritmo neperiano pode ser o mais comumente encontrado nas calculadoras disponíveis no mercado.

$$(1{,}05)^n = 1{,}71034$$

nx$\log 1{,}05 = \log 1{,}71034$

n = $\frac{\log 1{,}71034}{\log 1{,}05} = \frac{0{,}53669}{0{,}04879} = 11$

Portanto, n = 11meses.

A solução deste problema também pode ser facilmente obtida através de pesquisa na tabela de 5%, encontrada no apêndice B. Percorrendo-se a coluna $(1+i)^n$, vamos encontrar o valor 1,71034 exatamente na linha n = 11.

3- Determinar o montante correspondente a uma aplicação de $ 10.000,00, pelo prazo de 7 meses, a uma taxa de 3,387% ao mês.

Dados:

P = 10.000,00

n = 7 meses

i = 3,387% ao mês

S = ?

Solução: S = P$(1+i)^n$

S = 10.000,00$(1{,}03387)^7 = 12.625{,}88$

4- A que taxa um capital de $ 43.000,00 pode ser dobrado em 18 meses?

Dados: S = 2x43.000,00 = 86.000,00

P = 43.000,00

n = 18 meses

i = ?

Solução: S = P $(1+i)^n$

$(1+i)^{18} = \frac{86.000{,}00}{43.000{,}00} = 2$

$[(1+i)^{18^{1/18}} = 2^{1/18}$

1 + i = $2^{1/18}$= 1,03926

I = 3,926%

5-Um título de renda fixa deverá ser resgatado por $ 10.000,00 no seu vencimento, que ocorrerá dentro de 3 meses. Sabendo-se que o rendimento desse título é de 40% ao ano, determinar o seu valor presente.

Dados: S = 10.000,00

n= 3 meses

i = 40% ao ano

P = ?

Este problema apresenta uma dificuldade o período unitário do prazo(mês) não é compatível com o período unitário da taxa(ano). Quando isto ocorre, é necessário fazer a conversão da taxa ou do prazo. Para a conversão da taxa vamos utilizar o conceito de taxas equivalentes, que veremos a seguir. Quanto ao problema proposto, apresentaremos sua solução mais adiante.

2.2 Equivalência de taxas

Diz-se que a taxa mensal i_m é equivalente à taxa anual i_a quando:

P $(1 + i_a) = P(1 + i_m)^{12}$

ou seja, duas ou mais taxas referenciadas a períodos unitários distintos são equivalentes quando produzem o mesmo montante no final de determinado tempo, pela aplicação de um mesmo capital inicial. Da igualdade acima, deduz-se que:

$(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12}$

$i_a = (1 + i_m)^{12} - 1$ para determinar a taxa anual, conhecida a taxa mensal.Digite a equação aqui.
$i_m = \sqrt[12]{(1 + i_a)} - 1 = (1 + i_a)^{1/12} - 1$ para determinar a taxa mensal, quando se conhece a anual.

Da mesma forma,dada uma taxa mensal ou anual, determina-se a taxa diária e vice-versa.

Exemplos:

a- Determinar a taxa anual equivalente a 2% ao mês:

$$i_a = (1 + i_m)^{12} - 1 = (1{,}02)^{12} - 1 = 1{,}2682 - 1 = 0{,}2682 ou 26{,}82\%$$

b- Determinar a taxa mensal equivalente a 60,103% ao ano:

$$i_m = (1 + i_a)^{1/12} - 1 = (1{,}60103)^{1/12} - 1 = 1{,}04 - 1 = 0{,}04 ou\ 4\%\ ao\ mês$$

c- Determinar a taxa anual equivalente a 0,19442% ao dia:

$$i_a = (1 + i_d)^{360} - 1 = (1{,}0019442)^{360} - 1 = 2{,}0122 - 1 = 1{,}0122 ou 101{,}22\%\ ao\ ano$$

d- Determinar a taxa trimestral equivalente a 47,746% em dois anos:

$$i_t = (1 + i_{2a})^{1/8} - 1 = (1{,}47746)^{1/8} - 1 = 1{,}05 - 1 = 0{,}05 = 5\%\ ao\ trimestre$$

e- Determinar a taxa anual equivalente a 1% à quinzena:

$$i_a = (1 + i_q)^{24} - 1 = (1{,}01)^{24} - 1 = 1{,}2697 - 1 = 0{,}2697 = 26{,}97\%\ ao\ ano$$

Como no dia-a-dia os períodos a que se referem as taxas que se tem e as taxas que se quer são os mais variados, vamos apresentar uma fórmula genérica, que possa ser utilizada para qualquer caso, ou seja:

$$i_q = (1 + i_t)^{q/t} - 1^*$$

Para efeito de memorização denominamos as variáveis como segue:

i_q: *taxa para o prazo que eu quero*

i_t:*taxa para o prazo que eu tenho*

q: prazo que eu quero

t: prazo que eu tenho

Vejamos alguns exemplos:

f- Determinar a taxa para 183 dias, equivalente a 65% ao ano:

$$i_{183} = (1{,}65)^{\frac{183}{360}} - 1 = 28{,}99\%$$

g- Determinar a taxa para 491 dias, equivalente a 5% ao mês:

$$i_{491} = (1{,}05)^{\frac{491}{30}} - 1 = 122{,}23\%$$

h- Determiar a taxa para 27 dias, equivalente a 13% ao trimestre:

$$i_{27} = (1{,}13)^{\frac{27}{90}} - 1 = 3{,}73\%$$

Nota: As soluções dos problemas apresentados foram obtidas por meio de calculadora, utilizando-se a função potência.

Conhecido o conceito de taxas equivalentes, podemos solucionar o último problema do item anterior, de nº 5.

Dados: S = 10.000,00

n = 3 meses

i = 40% ao ano = i_a

P = ?

Taxa mensal = $i_m = \ (1 + i_{a)})^{\frac{1}{12}} - 1 = (1{,}40)^{\frac{1}{12}} = -1 = 1{,}02844 - 1 = 0{,}02844, ou 2{,}844\% \ ao\ mês$

Solução: P = $\frac{S}{(1+i)^n}$

P = $\frac{10.000{,}00}{(1{,}02844)^3} = 9.193{,}12$

Para a solução deste problema, podemos também alterar o prazo para contabilizá-lo com o período unitário da taxa, uma vez que ambos devem estar referenciados à mesma unidade de tempo. Assim, o prazo de três meses equivale a $\frac{3}{12}$ anos. Desta forma, podemos apresentar a solução deste problema como segue:

P = $\frac{10.000{,}00}{(1{,}40)^{\frac{3}{12}}} = 9.193{,}23$

A diferença de $ 0,11 deve-se ao fato de termos utilizado a taxa mensal com apenas três casas decimais; com cinco ou mais decimais o resultado seria o mesmo. Preferencialmente, por uma questão de praticidade e exatidão, o usuário deve optar pela alteração do prazo. Para melhor entendimento e fixação de como proceder quando a taxa e prazo não estão na mesma unidade de tempo, vamos apresentar e resolver mais dois exemplos

6- Uma pessoa aplica $ 15.000,00 num título de renda fixa com vencimento no final de 61 dias, a uma taxa de 72% ao ano. Calcular o seu valor de resgate.

Dados: P = 15.000,00

i = 72%

n = 61 dias

S = ?

Solução: S = 15.000,00 $(1{,}72)^{\frac{61}{360}}$

S = 16.443,73

7- Qual a taxa mensal de juros cobrada num empréstimo de $ 64.000,00 para ser quitado por $ 79.600,00 no prazo de 117 dias?

Dados: P = 64.000,00

S = 79.600,00

n = 117 dias

$i_m =?$

Solução: taxa no período = $i_p = \frac{S}{P} - 1$

$$i_p = \frac{79.600{,}00}{64.000{,}00} - 1 = 0{,}24375 \; ou \; 24{,}375 \; param \; o \; período \; de \; 117 \; dias$$

A partir $da \; fórmula \; de \; equivalência \; de \; taxas \;\; i_q = (1 + i_t)^{\frac{q}{t}} - 1, podemos \; escrever$:

$$i_m = \; (1{,}24375)^{\frac{30}{117}} - 1 = 0{,}05752 \; ou \; 5{,}752\%$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1- Determinar o montante, no final de 10 meses, resultante da aplicação de um capital de $ 100.000,00 à taxa de 3,75% ao mês.

S = P $(1 + i)^n$

S = 100.000,00$(1 + 0{,}0375)^{10}$

S = 144.504,39

2-Uma pessoa empresta $ 80.000,00 hoje para receber $ 507.294,46 no final de dois anos. Calcular as taxas mensal e anual desse empréstimo.

P = 80.000,00

S = 507.294,46

n = 2 anos

507.294,46 = 80.000,00$(1 + i)^2$

$\frac{507.294,46}{80.000,00} = (1+i)^2$

$(1+i)^2 = 6,34118075$

$\log(1+i)^2 = \log 6,34118075$

$2\log(1+i) = 0,802170132$

$\log(1+i) = \frac{0,802170132}{2}$

$\log(1+i) = 0,401085066$

(1 + i) = $10^{0,401085066}$

(1 + i) = 2,518170118

i =2,518170118 – 1

i = 1,518170118 = 151,817% ao ano

$(1+i_{a)}{}^{\frac{1}{12}} - 1 =$

$(1+1,51817)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1,079999 - 1 = 0,07999 = 7,999\% a.m. = 8\%\ ao\ mês$

2- Sabendo-se que a taxa trimestral de juros cobrada por uma instituição financeira é de 12,486%, determinar qual o prazo em que um empréstimo de $ 20.000,00 será resgatado por $ 36.018,23.

$i_t = 12,466\%$

P = 20.000,00

S = 36.018,23

S = P $(1+i)^n$

36.018,23 = 20.000,00$(1+0,12486)^n$

$(1+0,12486)^n = \frac{36.018,23}{20.000,00}$

$(1+0,12486)^n = 1,8009115$

$(1,12486)^n = 1,8009115$

$\log(1,12486)^n = \log 1,8009115$

$\text{nlog}\, 1,12486 = 0,255492371$

n = $\frac{0,255492371}{0,051098473}$

n = 5 trimestres (ou 15 meses)

4-Quanto devo aplicar hoje, à taxa de 51,107% ao ano, para ter $ 1.000.000,00 no final de 19 meses?

i = 51,107% a. a.

P = ?

S = 1.000.000,00

n = 19 meses

n = $\frac{19}{12} = 1{,}58333\ anos$

S = P $(1 + i)^n$

1.000.000,00 = P$(1 + 0{,}51107)^{1{,}58333}$

1.000.000,00 = P $(1{,}51107)^{1{,}58333}$

1.000.000,00 = P 1,9225013777

P = 520.155,67

5-Em que prazo uma aplicação de $ 374.938,00, à taxa de 3,25% ao mês, gera um resgate de $ 500.000,00.

P = 374.938,00

i = 3,25% ao mês

S = 500.000,00

S = P $(1 + i)^n$

500.000,00 = 374.938,00$(1 + 0{,}0325)^n$

500.000,00 = 374.938,00$(1{,}0325)^n$

$$\frac{500.000{,}00}{374.938{,}00} = (1{,}0325)^n$$

$$1{,}33355 = (1{,}0325)^n$$

log 1,33355 = log$(1{,}0325)^n$

log 1,3335 = n log(1,0325)

0,125 = nx0,01389

n = $\frac{0{,}125}{0{,}01389} = 9\ meses$

6- Uma empresa obtém um empréstimo de $ 700.000,00 que será liquidado, de uma vez só , no final de 2 anos. Sabendo-se que a taxa de juros é de 25% ao semestre, calcular o valor pelo qual esse empréstimo será quitado.

P = 700.000,00

n = 2 anos ou 4 semestres

i = 25% ao semestre

S = P $(1 + i)^n$

S = 700.000,00 $(1 + 0{,}25)^4$

S = 700.000,00 $(1{,}25)^4$

S = 700.000,00x2,44140625 = 1.708.984,38

7- Um terreno está sendo oferecido por $ 450.000,00 a vista ou $ 150.000,00 de entrada e mais uma parcela de $ 350.000,00, no final de 6 meses. Sabendo-se que no mercado a taxa média para aplicação em títulos de renda prefixada gira em torno de 3,5% ao mês(taxa liquida, isto é, com o imposto de renda já computado),determinar a melhor opção para um interessado que possua recursos disponíveis para comprá-lo.

450.000,00 a vista

Ou 150.000,00 entrada

Financia 300.000,00

Juro de 50.000,00

350.000 = 300.000$(1+i)^6$

$$\frac{350.000}{300.000} = (1+i)^6$$

1,1666 = $(1+i)^6$

$$\log 1{,}1666 = \log(1+i)^6$$

$$\log 1{,}1666 = 6\log(1+i)$$

$$\frac{0{,}06692}{6} = \log(1+i)$$

$$\log(1+i) = 0{,}0111$$

(1 + i) = $10^{0{,}0111}$

1 + i = 1,02588

I = 1,02588 – 1 = 0,02588 = 2,6% ao mês

Melhor comprar a prazo pois deixando aplicado a taxa é maior

8- A que taxa de juros um capital aplicado pode ser resgatado, no final de 17 meses, pelo dobro de seu valor?

S = P $(1+i)^n$

S = 2P

2P = P $(1+i)^{17}$

2 = $(1+i)^{17}$

$$\log 2 = \log(1+i)^{17}$$

$$\log 2 = 17\log(1+i)$$

$$\frac{0{,}3010299}{17} = \log(1+i)$$

$$\log(1+i) = 0{,}0177$$

$$10^{0{,}0177} = 1+i$$

1 + i = 1,04159

i = 1,04159 – 1

i = 0,04159 ou i = 4,159% a. m.

9- Em quanto tempo um capital pode produzir juros iguais a 50% do seu valor se aplicado a 3,755% ao mês?

J = S – P

$$\frac{P}{2} = S - P$$

P = 2S – 2P

2S = 3P

S = $\frac{3P}{2}$

$$\frac{3P}{2} = P(1+i)^n$$

$$\frac{3}{2} = (1 + 0{,}03755)^n$$

$$\frac{3}{2} = (1.03755)^n$$

$$\log 1{,}5 = \log 1{,}03755^n$$

$$\log 1{,}5 = n \log 1{,}03755$$

0,17609 = nx0,016

n = 11 meses

10- A aplicação de certo capital, à taxa de 69,588% ao ano, gerou um montante de $ 820.000,00 no final de 1 ano e três meses. Calcular o valor dos juros.

P = ?

i = 69,588% ao ano

S = 820.000,00

n = 1 ano e 3 meses

j =?

n = $\frac{15}{12} = 1{,}25 anos$

S = P$(1+i)^n$

820.000,00 = P$(1 + 0{,}69588)^{1{,}25}$

820.000,00 = P $(1{,}69588)^{1{,}25}$

820.000,00 = P 1,935280399

P = 423.711,21

J =S – P

J = 820.000,00 – 423.711,21

J = 396.288,78

11-Qual é mais vantajoso: aplicar $ 10.000,00 por 3 anos, a juros compostos de 3% ao mês, ou aplicar esse mesmo valor, pelo mesmo prazo, a juros simples de 5% ao mês?

$$P_1 = 10.000,00$$

n_1 = 3 anos = 36 meses

$$i_1 = 3\%\ ao\ mês$$

$$P_2 = 10,000,00$$

$$n_2 = 3anos = 36meses$$

$$i_2 = 5\%\ ao\ mês$$

S = P $(1+i)^n$

S = 10.000,00$(1+0{,}03)^{36}$

S = 10.000,00$(1{,}03)^{36}$

S = 10.000,00.2,898278328

S = 28.982,78

S = P(1 + i.n)

S = 10.000,00(1 + 0,05.36)

S = 10.000,00(1 + 1,8)

S = 10.000,00.2,8

S = 28.000,00

É mais vantajoso aplicar a juros compostos pois o montante é maior

12-No fim de quanto tempo um capital aplicado à taxa de 4% ao mês, quadruplica seu valor:

a- No regime de capitalização composta
b- No regime de capitalização simples

n = ?

i = 4% ao mês

S = 4P

4P = P $(1+0{,}04)^n$

$$\log 4 = \log 1{,}04^n$$

$$\log 4 = n \log 1{,}04$$

0,60205999 = nx0,0170333

n =35,34 meses →capitalização composta

S = P (1 + i.n)

4P = P(1 + 0,04n)

4 = 1 + 0,04n

4 – 1 = 0,04n

0,04n = 3

n =$\frac{3}{0,04} = 75\ meses \rightarrow capitalização\ simples$

13-Qual o montante produzido pela aplicação de $ 580.000,00, à taxa de 175% ao ano, pelo prazo de 213 dias?

P = 580.000,00

i =175% ao ano

n = 213 dias

n =$\frac{213}{360} = 0,59166$

S = P $(1 + i)^n$

S = 580.000,00 $(1 + 1,75)^{0,59166}$

S = 580.000,00.$(2,75)^{0,59166}$

S = 580.000,00X1,819430965

S = 1055.269,959

14- Qual o valor do capital que aplicado à taxa de 18% ao trimestre durante 181 dias, produziu um montante de $ 5.000,00?

P = ?

i = 18% a.t.

n = 181 dias = $\frac{181}{90}$=2,01111

S = 5.000,00

5.000,00 = P$(1 + 0,18)^{2,01111}$

5.000,00 = P$(1,18)^{2,01111}$

5.000,00 = Px1,394963048

P =3.584,32

15- A aplicação de $ 400.000,00 proporcionou um resgat de $ 610.461,56 no final de 6 meses. Determinar as taxas mensal e anual dessa operação.

P = 400.000,00

S = 610.461,56

n = 6meses

i = a.a.=?

i = a.m.=?

610.461,56 = 400.000,00$(1+i)^6$

$$\frac{610.461,56}{400.000,00} = (1+i)^6$$

1,5261539 = $(1+i)^6$

$$\log 1{,}5261539 = \log(1+i)^6$$

$$\log 1{,}5261539 = 6\log(1+i)$$

0,18359833 = 6$\log(1+i)$

$$\log(1+i) = \frac{0{,}18359833}{6}$$

$$\log(1+i) = 0{,}030599721$$

1 + i = $10^{0{,}030599721}$

1 + i = 1,07299

i = 1,07299 – 1

i = 0,07299 = 7,29 % a.m.

$$\frac{7{,}3}{100} = 0{,}073$$

0,073 + 1 = 1,073

$$1{,}073^{12} = 2{,}329145737$$

2,329145737 – 1 = 1,3291 = 132,91% a.a.

16- Certa aplicação rende 0,225% ao dia. Em que prazo um investidor poderá receber o dobro da sua aplicação?

i =0.00225

S = 2P

S = P $(1+i)^n$

2P = P $(1+0{,}00225)^n$

2 = $(1{,}00225)^n$

$$\log 2 = \log 1{,}00225^n$$

0,301029995 =n.$\log 1{,}00225$

0,301029995 = nx9,760649.10^{-4}

n = 308 dias

17- j = S – P

240.000 = S – 380.000

S =620.000

620.000 = 380.000$(1+i)^{208}$

1,631578947 = $(1+i)^{208}$

$$\log 1{,}631578947 = \log(1+i)^{208}$$

0,212608092 = $\log(1+i)$

1 + i = $10^{0{,}212608092}$

1 + i = 1,631578944

i = 1,631578944 – 1

i = 0,63157 para 208 dias

i = 63,157%

63,15/100 = 0,6315

0,6315 + 1 = 1,6315.

$\sqrt[208]{1{,}6315}$ - 1 = 1,002356 – 1 = 0,002356 = 0,2356% a.d.

0,2356/100 = 0,002356 + 1 = 1,002356

$1{,}002356^{30} = 1{,}07314852 - 1 = 0{,}07314852 = 7{,}31\%\ a.m.$

7,31/100 = 0,0731 + 1 = $1{,}0731^{3} = 1{,}235721448 - 1 = 0{,}235721448x100 = 23{,}57\%\ a.t.$

7,31/100 = 0,0731 + 1 = $1{,}0731^{12} = 2{,}331751895 - 1 = 1{,}331751895 = 133{,}17\% a.a.$

18-Em 154 dias uma operação rendeu 41,123%. Calcular as taxas mensal e anual equivalentes.

n =154 dias.

Calcular i anual e i mensal

$$i_{154} = 0{,}41123 + 1 = 1{,}41123$$

$\sqrt[154]{1{,}41123}$ =1,002239267 – 1 =0,002239267

0,002239x100 = 0,2239% a.d.

i_m=0,002239 + 1 = 1,002239

$$1{,}002239^{30} = 1{,}69405538 - 1 = 0{,}69405538x100 = 6{,}94\%\ a.m.$$

0,0694 + 1 = 1,0694

$1{,}0694^{12}$=2,237083307 – 1 = 1,237083307x100 = 123,7% a.a.

19-Um banco cobra 20% a.a. de juros(além da correção monetária) numa operação de capital de giro. Quanto cobrará para uma operação em 182 dias? (considerar o ano como sendo 360 dias)

i =20% a. a. de juros

20/100 = 0,20

0,20 + 1 = 1,20

$$\sqrt[360]{1{,}2} = 1{,}000506577 - 1 = 0{,}000506577 = 0{,}0506577\% a.d.$$

0,000506577x100 = 0,0506577 + 1 = 1,0506577

$1{,}0506577^{182}$=1,09655525 – 1 =0,09655525 = 9,65%

20-Quanto uma pessoa resgatará no final de 93 dias se aplicar $ 2 milhões à taxa de 150% a.a.? e qual a taxa mensal equivalente?

n = 93 dias

P = 2.000.000,00

I = 150% a. a.

150/100 = 1,5 + 1 = 2,5

$\sqrt[360]{2{,}5}$ = 1,002548494 – 1 = 0,002548% a.d.

S = P $(1+i)^n$

S = 2.000.000,00$(1 + 0{,}002548)^{93}$

S = 2.000.000,00$(1{,}002548)^{93}$

S = 2.000.000,00X1,26701358

S = 2.534.027,16

21- Um Certificado de Deposito Bancário (CDB) equivalente a 500 URV rende juros de 15% ao ano. Sendo o seu prazo de 243 dias, calcular o valor de resgate(em URV), antes do imposto de renda.

i = 15% a.a.

n = 243 dias

15/100 = 0,15

0,15 + 1 = 1,15

$\sqrt[360]{1{,}15} = 1{,}000388303 - 1 = 0{,}000388303$x100 = 0,0388303 a.d.

0,000388303 + 1=1,000388303

$1{,}000388303^{243} = 1{,}098932563$-1 =0,098932563

$$i_{243} = 9{,}8932563$$

500x0,098932563 = 49,46

49,46 + 500 = 549,46 URV

$$0{,}301029995 = n\log 1{,}00225$$