Definição: sejam dados dois números reais positivos a e b, com b ≠ 1; chamamos de logaritmos de a na base b, e indicamos $\log_b a$, ao expoente c ao qual devemos elevar a base b para encontrarmos o número a:

$\log_b a = c \Rightarrow b^c = a$ para $0 < b \neq 1$ e $a > 0$

b => é a base
c => é o logaritmo
a => é o logaritmando ( aquele de quem se calcula o logaritmo )

1) Calcular $\log_2 64$.

$$\log_2 64 = x$$
$$2^x = 64$$
$$2^x = 2^6$$
$$x = 6$$

portanto $\log_2 64 = 6$

2) Calcular $\log_{81} 3$

$$\log_{81} 3 = x$$
$$81^x = 3$$
$$(3^4)^x = 3$$
$$3^{4x} = 3$$
$$4x = 1$$
$$x = \frac{1}{4}$$

3) Calcular $\log_8 1/2$

$$\log_8 \frac{1}{2} = x$$
$$8^x = \frac{1}{2}$$
$$(2^3)^x = 2^{-1}$$
$$2^{3x} = 2^{-1}$$
$$3x = -1$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

4)*Calcular* $\log_2 \sqrt{32}$

$\log_2 \sqrt{32} = x$

$2^x = \sqrt{32}$

$2^x = \sqrt{2^5}$

$2^x = 2^{5/2}$

$x = \frac{5}{2}$

5) Calcular $\log_7 7$

$\log_7 7 = x$

$7^x = 7 \rightarrow 7^x = 7^1 \rightarrow$ x = 1

6) Calcular $\log_8 1$

$\log_8 1 = x$

$8^x = 1 \rightarrow 8^x = 8^0 \rightarrow$ x = 0

7)*Calcular* $\log_{1/9} \sqrt[3]{81}$

$\log_{1/9} \sqrt[3]{81} = x$

$\left(\frac{1}{9}\right)^x = \sqrt[3]{81}$

$\left(\frac{1}{3^2}\right)^x = \sqrt[3]{3^4}$

$\left(3^{-2}\right)^x = 3^{4/3}$

$3^{-2x} = 3^{4/3}$

$-2x = \frac{4}{3}$

$2x = -\frac{4}{3}$

$x = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

8) Calcular $\log_{0,2} 125$

$$\log_{0.2} 125 = x$$
$$(0.2)^x = 125$$
$$\left(\frac{2}{10}\right)^x = 5^3$$
$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = 5^3$$
$$\left(5^{-1}\right)^x = 5^3$$
$$5^{-x} = 5^3$$
$$-x = 3$$
$$x = -3$$

9) Calcular a base b, sabendo que $\log_b 49 = 2$

$$b^2 = 49$$
$$b = \pm\sqrt{49}$$
$$b = \pm 7$$

pela definição $0 < b \neq 1$, portanto $b = -7$ não serve.

$b = 7$

10) Determinar os valores de x para que exista $\log_5 (2x + 3)$.
Para que exista um logaritmo, o logaritmando deve ser positivo
$a > 0$

$2x + 3 > 0$

$2x > -3$

$x > -3/2$

11) Determinar os valores de x para os quais exista $\log_{3x-7} 8$ pela definição $0 < b \neq 1$.
$0 < 3x - 7 \neq 1$

$7 < 3x \neq 8$

$7/3 < x \neq 8/3$

12) Determinar os valores de x para os quais exista $\log_{2x-5} (x^2 - 5x + 4)$

$x^2 - 5x + 4 > 0$ e $0 < 2x - 5 \neq 1$

$x^2 - 5x + 4 > 0$
raízes da função $f(x) = x^2 - 5x + 4$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

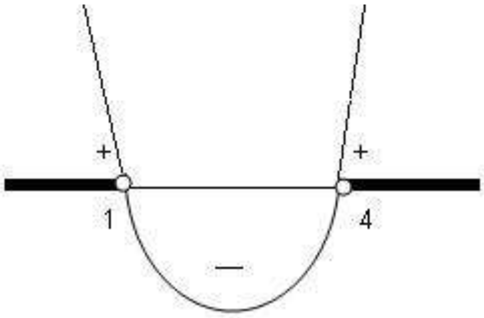
$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.4}}{2.1}$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} =$

$x_1 = 4$

$x_2 = 1$



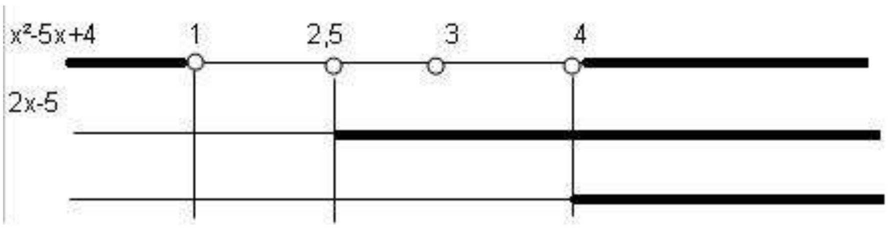

x < 1 ou x > 4 $\quad$ 2x – 5 ≠ 1

0 < 2x – 5 ≠ 1 $\quad$ 2x ≠ 6

2x – 5 > 0 $\quad$ x ≠ 6/2

2x > 5 $\quad$ x ≠ 3

X > 5/2




X > 4

Conseqüências da definição:
Supondo que $0 < b \neq 1$, $a > 0$, $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$ e $\alpha \in$ IR, podemos tirar as seguintes conseqüências da definição de logaritmo:

1) $\log_b 1 = 0$

2) $\log_b b = 1$

3) $a_1 = a_2 \Rightarrow \log_b a_1 = \log_b a_2$

4) $b^{\log_b a} = a$

5) $\log_b b^\alpha = \alpha$

Facilitando cálculos trabalhosos:
Seja a seguinte expresso numérica:

$$\sqrt[11]{\frac{1536 \times 43{,}6^7 \times 7085}{932}}$$

Através do uso de logaritmo o calculo dessa expressão torna-se muito menos trabalhoso; levando-se em conta que antigamente não existia a calculadora para efetuar esse tipo de calculo, só as tábuas de logaritmos. Algumas calculadoras eletrônicas apresentam a tecla LOG que calcula logaritmos decimais, isto é, logaritmos na base 10. Para calcularmos o logaritmo decimal de um numero positivo, devemos proceder da seguinte forma:

- Digita-se o número positivo do qual se quer obter o logaritmo.
- Em seguida aperta-se a tecla LOG, obtendo-se no visor o logaritmo decimal do número digitado.

Por exemplo, digitando-se o número 1,4 e apertando-se a tecla LOG, aparecera no visor o número 0,14612 ( considerando-se 5 casas decimais ), chamado logaritmo decimal do número 1,4. Isso significa que $10^{0,14612}$, ou seja, escrevemos o número 1,4 como uma potência de base 10. Generalizando temos log a = x $\Rightarrow 10^x = a$

Calculando a expressão numérica acima:

$$\log_{10} 1536 = 3{,}1863 \Rightarrow 10^{3{,}1863} = 1536$$

$$\log_{10} 43{,}6 = 1{,}6394 \Rightarrow 10^{1{,}6394} = 43{,}6$$

$$\log_{10} 7085 = 3{,}8503 \Rightarrow 10^{3{,}8503} = 7085$$

$$\log_{10} 932 = 2{,}9694 \Rightarrow 10^{2{,}9694} = 932$$

Substituindo os valores temos

$$\sqrt[11]{\frac{10^{3{,}1863} \times \left(10^{1{,}6394}\right)^7 \times 10^{3{,}8503}}{10^{2{,}9694}}} =$$

$$\sqrt[11]{\frac{10^{3{,}1863} \times 10^{11{,}4758} \times 10^{3{,}8503}}{10^{2{,}9694}}} =$$

$$\sqrt[11]{\frac{10^{3{,}1863+11{,}4758+3{,}8503}}{10^{2{,}9694}}} =$$

$$\sqrt[11]{\frac{10^{18{,}5124}}{10^{2{,}9694}}} =$$

$$\sqrt[11]{10^{18{,}5124-2{,}9694}} =$$

$$\sqrt[11]{10^{15,543}} =$$

$$10^{15,543/11} = 10^{1,413} = 25,9$$

Escrevendo os números como potências de base 10, ocorre o seguinte:
- Multiplicações transformam-se em adições
- Divisões transformam-se em subtrações
- Potenciações transformam-se em multiplicações
- Radiciações transformam-se em divisões

Propriedades:

Supondo que $0 < b \neq 1$, $a > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ...., $a_n > 0$ e
$\alpha \in IR$

1) $\log_b(a_1 \times a_2 \times ... \times a_n) = \log_b a_1 + \log_b a_2 + ... + \log_b a_n$

2) $\log_b (a_1 / a_2) = \log_b a_1 - \log_b a_2$

3) $\log_b a^{\alpha} = \alpha \log_b a$

$$4) \log_{b^{\alpha}} a = \frac{1}{\alpha} \log_b a$$

com $\alpha \neq 0$
Exercícios:
1) Sabendo-se que log2 = 0,3010 e log3 = 0,4771, calcular log6 ?

$$\log 6 = \log 3x2 = \log 3 + \log 2 = 0,3010 + 0,4771 = 0,7781$$

2) Sabendo-se que log2 = 0,3010 calcular log5.

$$\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,3010 = 0,6990$$

3) Sabendo-se que log2 = 0,3010, calcular $\log_{100} 2$.

$$\log_{100} 2 = \log_{10^2} 2 = \frac{1}{2} \times \log_{10} 2 = \frac{1}{2} \times \log 2 = \frac{1}{2} \times 0,3010 = 0,1505$$

4) Sabendo-se que log2 = 0,3010 e log3 = 0,4771, calcular log108.

| | |
|---|---|
| 108 | 2 |
| 54 | 2 |
| 27 | 3 |
| 9 | 3 |
| 3 | 3 |
| 1 | $2^2 x 3^3$ |

$$\log 108 = \log(2^2 \times 3^3) = \log 2^2 + \log 3^3 = 2\log 2 + 3\log 3 =$$
$$= 2 \times 0{,}3010 + 3 \times 0{,}4771 = 0{,}6020 + 1{,}4323 = 2{,}0343$$

5) Resolver a equação:

$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x + 4) = 2$
$x + 1 > 0$ e $x + 4 > 0$
$\log_2 (x + 1)(x + 4) = 2$
$(x + 1)(x + 4) = 2^2$

$(x + 1)(x + 4) = 4$

$x^2 + 4x + x + 4 = 4$

$x^2 + 5x + 4 = 4$

$x^2 + 5x = 4 – 4$

$x^2 + 5x = 0$

$x(x + 5) = 0$

$x = 0$ ou $x + 5 = 0$

$x + 5 = 0 \quad x = - 5$

Substituindo nas inequações conseqüentes da definição:

$x + 1 > 0$ e $x + 4 > 0$

$0 + 1 > 0$ $\quad$ $0 + 4 > 0$

$1 > 0$ (V) $\quad$ $4 > 0$ (V)

$-5 + 1 > 0$

$-4 > 0$ (F)

A solução que satisfaz a equação é S = { 0 }

6) Considere a tabela dos logaritmos a seguir:

| n | log n |
|---|---|
| 2 | 0,301 |
| 3 | 0,477 |
| 5 | 0,699 |
| 7 | 0,845 |
| 10 | 1,000 |

Com o auxílio dessa tabela, podemos calcular o logaritmo de 0,015. Seu valor é :

a) 1585 c) -1,824 e) -3,08

b) 0,111 d) -2,056

$$\log 0{,}015 = \log\frac{15}{1000} = \log 15 - \log 1000 = \log 3 \times 5 - \log 10^3 = \log 3 + \log 5 - 3\log 10 =$$

Usando os valores da tabela, temos:

0,477 + 0,699 – 3 x 1 = 1,176 – 3 = - 1,824 alternativa c

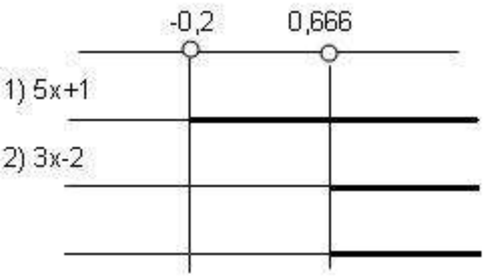
7) A solução da equação log (5x + 1) - log (3x - 2) = 2 é:

| | |
|---|---|
| 5x + 1 > 0 | 3x – 2 > 0 |
| 5x > -1 | 3x > 2 |
| x > -1/5 | x > 2/3 |

$$\log\frac{5x+1}{3x-2}=2$$
$$\frac{5x+1}{3x-2}=100$$
$$5x+1=100(3x-2)$$
$$5x+1=300x-200$$
$$295x=201$$
$$x=\frac{201}{295}=0{,}6813$$

5x + 1 > 0
5. 0,6813 + 1 > 0
4,4065 > 0  satisfaz a desigualdade

3x – 2 > 0
3. 0,6813 – 2 > 0
2,0439 – 2 > 0
0,0439 > 0 satisfaz a desigualdade, então x = 201/295 é raiz da equação.




x > 2/3                                2/3 = 0,666...
8) Resolver a equação $\log_{11}(2x - 3) = \log_{11}5$

2x – 3 > 0

2x – 3 = 5
2x = 5 + 3
2x = 8
x = 8/2 = 4
2 x 4 – 3 > 0
8 – 3 > 0
5 > 0 ; logo a raiz 4 satisfaz a condição de existência e, em conseqüência, vai para o conjunto-solução da equação dada, e portanto, temos que:
S = {4}

Mudança de base
Supondo que 0 < b ≠ 1, 0 < c ≠ 1 e a > 0, temos que:

$$\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Exercícios:

1) Sabendo que log 2 = 0, 3010 e log 3 = 0,4771, calcular $\log_2 3$.

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,4771}{0,3010} = 1,5850$$

2) Sabendo que log 2 = 0,3010 e log 3 = 0,4771, calcular $\log_3 2$.

$$\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0,3010}{0,4771} = 0,6309$$

Ilustração

Condições de existência
Nos exemplos abaixo você poderá entender melhor as condições de existência dos logaritmos. A base b de um logaritmo não pode ser negativa, não pode ser igual a zero nem igual a um.
Exemplos:

*a) Não existe* $\log_{-3} 27$ *pois não existe x real para que se tenha* $(-3)^x = 27$

*b) Não existe* $\log_0 7$, *pois não existe x real para que se tenha* $0^x = 7$

*c) Não existe* $\log_1 3$ *pois não existe x real para que se tenha* $1^x = 3$

O logaritmando a não pode ser negativo e nem igual a zero.
Exemplos:

*a) Não existe* $\log_2 (-8)$, *pois não existe x real para que se tenha* $2^x = -8$

*b) Não existe* $\log_5 0$, *pois não existe x real para que se tenha* $5^x = 0$

Conseqüências da definição

$a)\ \log_a 1 = 0$

*Exemplo :*

$\log_5 1 = 0$, *pois se* $\log_5 1 = x$, *então* : $5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow x = 0$

$b)\ \log_a a = 1$

*Exemplo :*

$\log_3 3 = 1$, *pois se* $\log_3 3 = x$, *então* : $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

$c)\ \log_a a^\alpha = \alpha$

*Exemplo :*

$\log_2 2^5 = 5$, *pois se* $\log_2 2^5 = x$, *então* : $2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

$d)\ \log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

*Exemplo :*

$\log_3 x = \log_3 9 \Rightarrow \log_3 x = \log_3 x^2 \Rightarrow \log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9$

$e)\ a^{\log_a b} = b$

*Exemplo :*

$5^{\log_5 25} = 25$, *pois* $5^{\log_5 25} = x \Leftrightarrow 5^{\log_5 5^2} = x$ *então*, $5^2 = x$ (*pois* $5^{\log_5 5^2} = 2$),

*logo* $x = 25$